هندسة المكانيك العام السنة الاولى

فريق الكريات الحمراء

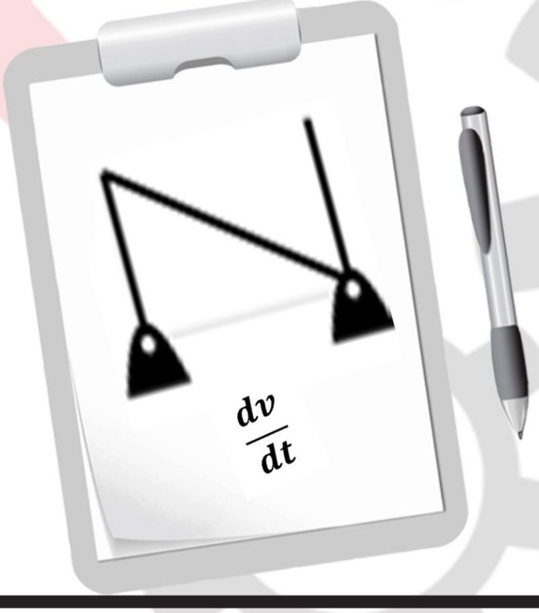
الحركة

...الجزء الاول...

- حل مسائل البحث الاول
- ملاحظات حول كيفية الحل

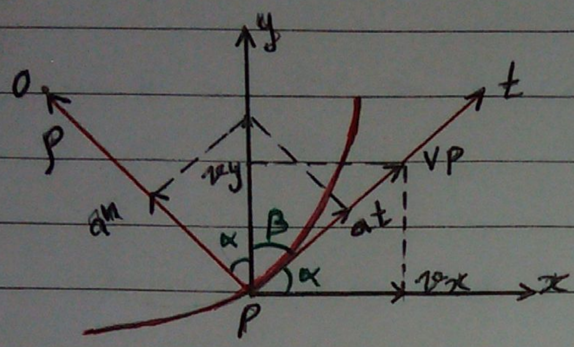
15 pages

75 sp



مسائل البحث الأول

مسألة 1 ص 65



$$\vec{V}_p = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

لكن من نص المسألة

$$v_x = 20\ mm.s^{-1} = const$$

لأن سرعة الدليل منتظمة وتوازي المحور x

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_y = \frac{2x}{160} \times v_x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{80} \times 20 \Rightarrow v_y = \frac{x}{4}$$

لكن $x = 60\,mm \Rightarrow v_y = 15\,mm.s^{-1}$

$$v_p = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow \sqrt{(20)^2 + (15)^2} = 25\ m.m.s^{-1}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

لأنه $v_x = const$ ، $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$

$$a = a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dt} \times \frac{dx}{dx} = \frac{dv_y}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \times v_x \Rightarrow \frac{1}{4} \times 20 = 5\ m.m.s^{-2}$$

$$\vec{a}_p = 5\ m.m.s^{-2}$$

طلب إضافي: أوجد التسارع المماسي والتسارع الناظمي ونصف قطر التقوس في الرسمة السابقة.

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v_p} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v_x}{v_p}\right) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{20}{25}\right) = 36{,}9^\circ$$

$$90 = \beta + \alpha \Rightarrow \beta = 90 - \alpha \Rightarrow \beta = 90 - 36{,}9^\circ = 53{,}1^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a_t}{a} \Rightarrow a_t = a\cos\beta \Rightarrow a_t = 5 \cdot \cos(53{,}1)$$

$$\Rightarrow a_t = 3\ m.m.s^{-2}$$

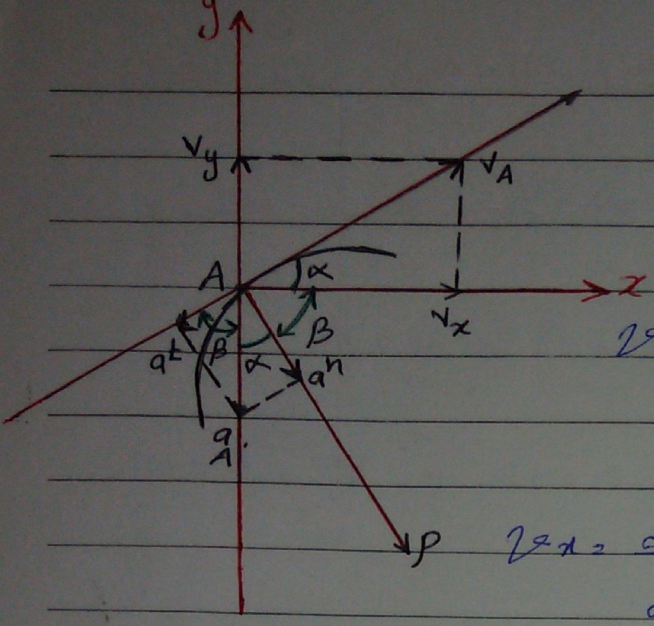
$$\cos\alpha = \frac{a_n}{a} \Rightarrow a_n = a \cdot \cos\alpha \Rightarrow a_n = 5 \cdot \cos(36{,}1)$$

$$\Rightarrow a_n = 4\ m.m.s^{-2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v_p^2}{a_n} \Rightarrow \rho = \frac{625}{4} = 156{,}125\ m.m$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

يمكن حساب ρ بطريقة ثانية



مسألة 2 . ص 65

$$\vec{V_A} = \vec{V_x} + \vec{V_y}$$

لكن نستنتج من نص المسألة

$$v_y = 30\ m.m.s^{-1}$$

لأن سرعة الدليل منتظمة وتوازي المحور y

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy}\times\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{60}\times v_y \Rightarrow \frac{y}{30}\times 30 \Rightarrow v_x = y \quad \ldots\ (2)$$

للحصول على y في اللحظة التي تكون $x = 60\ m.m$ نعوض في معادلة المسار

$$x = \frac{y^2}{60} \Rightarrow y^2 = x.60 \Rightarrow 60\times 60 = 3600 \Rightarrow y = 60\ m.m$$

نعوض قيمة y في (2) $\Leftarrow v_x = 60\ m.m.s^{-1}$

$$v_A = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow \sqrt{(60)^2 + (30)^2} = 67\ m.m.s^{-1}$$

$$\vec{A_A} = \vec{A_x} + \vec{A_y}$$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0$ لأن $v_y = const$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\times\frac{dy}{dy} = \frac{dv_x}{dy}\times\frac{dy}{dt}$$

$$a_x = 1\times v_y \Rightarrow a_x = 30\ m.m.s^{-2}$$

$$A_A = a_x = 30\ m.m.s^{-2}$$

طلب إضافي: أوجد التسارع المماسي والتسارع الناظمي ونصف قطر التقوس في الرسمة السابقة.

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v_A} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v_x}{v_A}\right) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{60}{67}\right) \Rightarrow \alpha = 26{,}5^\circ$$

$$90 = \beta + \alpha \Rightarrow \beta = 90 - \alpha \Rightarrow \beta = 63{,}5^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a_t}{a} \Rightarrow a_t = a.\cos\beta = 30.\cos(63{,}5^\circ)$$

$$\Rightarrow a_t = 13{,}4 \ m.m.s^{-2}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_n}{a} \Rightarrow a_n = a.\cos\alpha = 30\times\cos(26{,}5^\circ)$$

$$\Rightarrow a_n = 26{,}8 \ m.m.s^{-2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v_A^2}{a_n} = \frac{(67)^2}{26{,}8} = 167{,}5 \ m.m$$

أو نستطيع

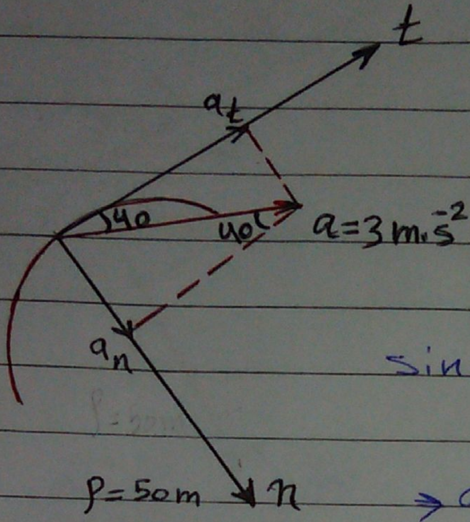
$$\cos\beta = \frac{a_n}{v_x} \Rightarrow a_n = v_x.\cos\beta$$

$$\Rightarrow a_n = 60.\cos(63{,}5) = 26{,}8$$

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2 \Rightarrow a_t^2 = a^2 - a_n^2$$

$$a_t = \sqrt{a^2 - a_n^2} \Rightarrow a_t = \sqrt{(30)^2 - (26{,}8)^2} = 13{,}4 \ m.m.s^{-2}$$

مسألة 3 ص66



$\cos 40 = \frac{a_t}{a} \Rightarrow$

$a_t = a.\cos 40 \Rightarrow a_t = 3 \times \cos 40$

$a_t = 2,3\ m.s^{-2}$

$\sin 40 = \frac{a_n}{a} \Rightarrow a_n = a.\sin 40$

$\Rightarrow a_n = 3 \times \sin 40 = 2\ m.s^{-2}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow v^2 = \rho \times a_n$

$\Rightarrow v^2 = 50 \times 2 = 100 \Rightarrow v = 10\ m.s^{-1}$

مسألة 5 ص67

$y = 0,4x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0,8x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0,8 \times 5 = 4\ m.s^{-1}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,8\ m.s^{-2}$

$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \Rightarrow \rho = \frac{[1+16]^{\frac{3}{2}}}{0,8} = 87,62\ Km$

$\Rightarrow \rho = 87620\ m$

للتحويل من Km ← m نضرب بـ 10^3

حساب التسارع الكلي

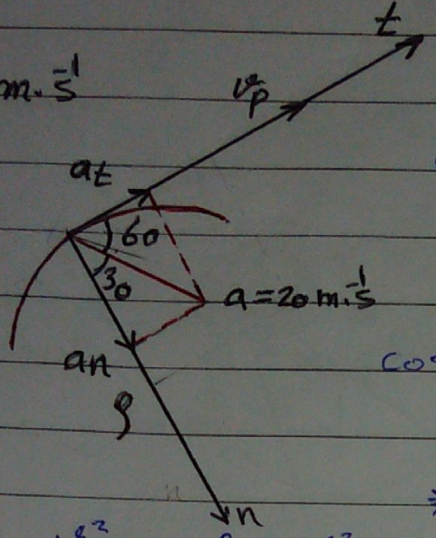
$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(200)^2}{87620} = 0,45\ m.s^{-2}$

$A = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \Rightarrow A = \sqrt{(0,45)^2 + (0,8)^2} = 0,92\ m.s^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = y'_x$ ، $\frac{d^2y}{dx} = y''_x$

للتوضيح

مسألة 6 ص 67



$v_p = 120 \, m.s^{-1}$

حساب التسارع المماسي

$\cos 60 = \frac{a_t}{a} \Rightarrow a_t = a \cos 60$

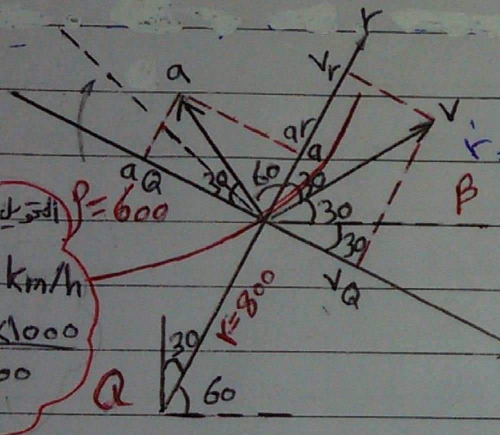
$\Rightarrow a_t = 20 . \cos 60 = 10 \, m.s^{-2}$

$\cos 30 = \frac{a_n}{a} \Rightarrow a_n = a . \cos 30$

$\Rightarrow a_n = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 10\sqrt{3} = 17,3 \, m.s^{-2}$

$a_n = \frac{v_p^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v_p^2}{a_n} = \frac{(120)^2}{10\sqrt{3}} \Rightarrow 831 \, m$

مسألة 7 ص 68



نصف قطر التقوس 1km هو

$v = 400 km/h$

$= \frac{400 \times 1000}{3600}$

$= 111$

$\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_Q}$

$\dot{r} = v_r = v . \cos 30 = 111 \times \cos 30 = 96,2 \, m.s^{-1}$

$v_Q = v . \sin 30 = 111 \times \sin 30 = 55,5 \, m.s^{-1}$

$v_Q = r . \dot{Q} \Rightarrow \dot{Q} = \frac{v_Q}{r} \Rightarrow \frac{55,5}{800}$

$= 0,07 (rad . s^{-1})$

$\vec{A} = \vec{A_r} + \vec{A_Q} \quad , A^t + A^n$

$A_r = \ddot{r} - r\dot{Q}^2 \Rightarrow \ddot{r} = r . \dot{Q}^2 + a_r \Rightarrow \ddot{r} = 800 \times (0,07)^2 + 10,26 = 14,18 \, m.s^{-2}$

$A_Q = r . \ddot{Q} + 2\dot{r} . \dot{Q} \Rightarrow r . \ddot{Q} = a_Q - 2\dot{r} . \dot{Q} \Rightarrow \ddot{Q} = \frac{a_Q - 2\dot{r} . \dot{Q}}{r} = \frac{-17,82 - 2 \times 96,2 \times 0,07}{800}$

$\ddot{Q} = -0,039 \, (rad . s^{-2})$

حساب التسارع الكلي

$A = A^n + A^t$

$A_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(111)^2}{600} = 20,53 \, m.s^{-2}$

$A_t = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow A = A_n$

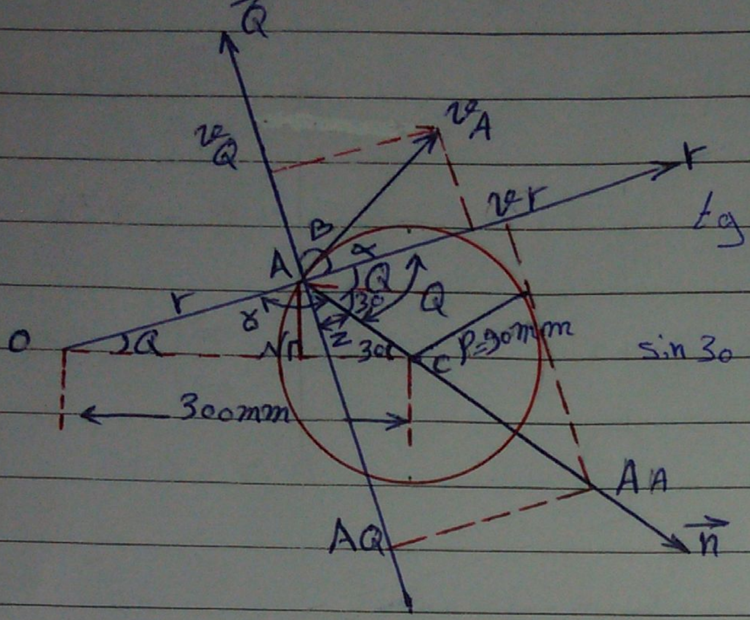
$\cos 30 = \frac{a_Q}{a} \Rightarrow a_Q = a . \cos 30 \Rightarrow$

$a_Q = 20,53 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,77 \, m.s^{-2}$

$\cos 60 = \frac{a_r}{a} \Rightarrow a_r = a . \cos 60 \Rightarrow$

$a_r = 20,53 . \frac{1}{2} = 10,27 \, m.s^{-2}$

مسألة 8 ص 68



حساب الزوايا .....

$tg\,Q = \frac{AN}{ON} \Rightarrow Q = tg^{-1}\left(\frac{AN}{ON}\right)$ ..... (1)

حساب AN

$\sin 30 = \frac{AN}{\rho} \Rightarrow AN = \rho \cdot \sin 30 =$

$90 \times \frac{1}{2} = 45\ m.m$

أو: الضلع المقابل للزاوية 30° يساوي نصف طول الوتر (ρ)

حساب ON

$ON = OC - NC$ ..... (2)

حساب NC

$\cos 30 = \frac{NC}{\rho} \Rightarrow NC = \rho \cdot \cos 30 = 90 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 78\ m.m$

نعوض قيمة NC في (2) ←

$ON = 300 - 78 = 222\ mm$

نعوض قيمة AN و ON في (1)

$Q = tg^{-1}\left(\frac{45}{222}\right) = 11.5°$

حساب α

$\alpha = 90 - (Q + 30) \Rightarrow \alpha = 90 - 41.5 = 48.5°$

حساب β

$\beta = 90 - \alpha \Rightarrow \beta = 90 - 48.5 = 41.5°$

حساب v_A

$v_A = \omega \cdot \rho = 60 \times 90 = 5400\ m.m.s^{-1}$

نحولها من $m.m.s^{-1}$ إلى $m.s^{-1}$ وذلك بضربها بـ 10^{-3}

$\Rightarrow v_A = 5.4\ m.s^{-1}$

حساب v_r

$$\cos\alpha = \frac{v_r}{v_A} \Rightarrow v_r = v_A \cdot \cos 30 = 5.4 \times \cos(48.5^\circ) = 3.58\ m.s^{-1}$$

$$\dot{r} = v_r = 3.58\ m.s^{-1}$$

حساب v_Q

$$\cos\beta = \frac{v_Q}{v_A} \Rightarrow v_Q = v_A \cdot \cos\beta \Rightarrow v_Q = 5.4 \times \cos(41.5) = 4\ m.s^{-1}$$

$$v_Q = r \cdot \dot{Q} \Rightarrow \ldots\ldots \quad (3)$$

حساب r

من المثلث القائم $\overset{\Delta}{ONA}$ حسب نظرية فيثاغورث

$$r^2 = (AN)^2 + (ON)^2 \Rightarrow r^2 = (45)^2 + (222)^2 = 51309$$

$$r = OA = 226.5\ m.m \Rightarrow r = 226.5 \times 10^{-3}\ m$$

نعوض r في (3) ⇐

$$\dot{Q} = \frac{v_Q}{r} = \frac{4}{226.5 \times 10^{-3}} = 17.66\ rad.s^{-1}$$

التسارع

$$a_t = \frac{dv_A}{dt} = 0 \qquad , \qquad v_A = const$$

$$A_A = a_n = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{(5.4)^2}{90 \times 10^{-3}} = 324\ m.s^{-2}$$

أخذنا ρ بـ (m)

الحركة دائرية منتظمة والسرعة ثابتة يكون التسارع المماسي معدوم والتسارع الكلي تسارع ناظمي

الزاوية بين $\vec{r}$ و $\vec{n}$ تساوي $Q + 30^\circ$ ⇐ $Q = 41.5$

$$\cos Q = \frac{A_r}{A_A} \Rightarrow A_r = A_A \times \cos Q = 324 \times \cos(41.5) = 242.6\ m.s^{-2}$$

$A_r = \ddot{r} - r.\dot{Q}^2 \Rightarrow \ddot{r} = A_r + r.\dot{Q}^2 \Rightarrow \ddot{r} = 242.6 + 226.5\times10^{-3}\times(17.66)^2 = 313.2$

$Z = 90 - (Q + 30) \Rightarrow 90 - 41.5 = 48.5 \Leftarrow 90 - \varphi$ الزاوية بين A_A و Q هي

$\cos Z = \frac{A_Q}{A_A} \Rightarrow A_Q = A_A.\cos Z \Rightarrow 324\times\cos(48.5) = -214.7\ m.s^{-2}$

$A_Q = r.\ddot{Q} - 2\dot{r}\dot{Q} \Rightarrow r.\ddot{Q} = A_Q - 2\dot{r}.\dot{Q} \Rightarrow \ddot{Q} = \frac{A_Q - 2\dot{r}.\dot{Q}}{r}$

$= \frac{-214.7 - 2(3.58).(17.66)}{226.5\times10^{-3}} = -1506\ (rad.s^{-1})$

طريقة ثانية لحساب الزاوية Q

$r^2 = (AC)^2 + (OC)^2 - 2(AC)(OC).\cos 30$

$r^2 = (90)^2 + (300)^2 - 2(90)(300).\frac{\sqrt{3}}{2} = 51334.6 \Rightarrow r = 226.5\ m.m$

ومن علاقة الدوبه (الجيب)

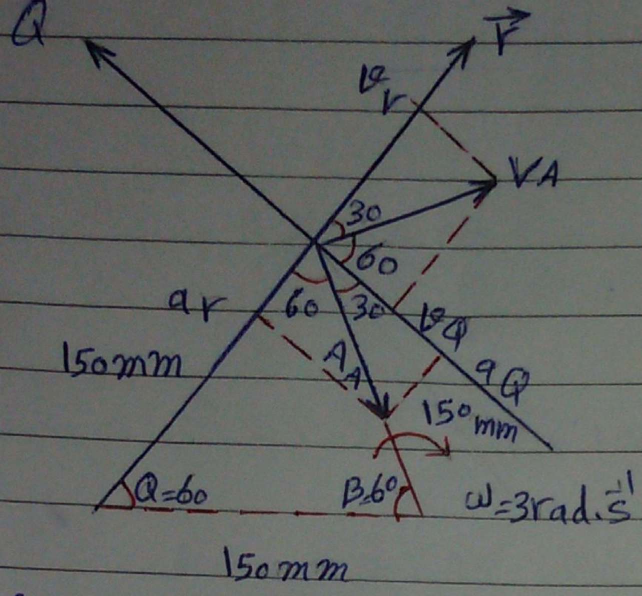
$\frac{r}{\sin 30} = \frac{AC}{\sin Q} = \frac{OC}{\sin \gamma}$

$\sin Q = \frac{AC.\sin 30}{r} \Rightarrow Q = \arcsin\left(\frac{AC.\sin 30}{r}\right) \simeq 11.5^\circ$

$\sin \gamma = \frac{OC.\sin 30}{r} \Rightarrow \gamma = \arcsin\left(\frac{OC.\sin 30}{r}\right) \simeq 41.5^\circ$

ونتابع بنفس القوانين :

مسألة 9 ص 69



الزاوية بين $\vec{Q}, \vec{r}$ = $90°$

الزاوية بين $\vec{A}_A , \vec{V}_A$ = $90°$

$r = 150mm \Rightarrow r = 0{,}15m$

للتحويل من mm ← m نضرب (10^{-3})

الزاوية $\theta = 60°$ لأن المثلث يحوي ضلعين متساويين وبينهما زاوية $60°$

اذاً المثلث متساوي الأضلاع

حركة الوصلة AB هي حركة دورانية حول B ⇐

أي $R = AB$ وهي نصف القطر، $v_A = \omega . R = 3 \times 0{,}15 = 0{,}45 \ m.s^{-1}$

ω باتجاه $v \perp R$

بما أن $\omega = const$ ⇐ الحركة دائرية منتظمة ⇐ التسارع الكلي هو تسارع ناظمي فقط أي $A_t = 0$

$$A_A = A_A^n = \omega^2 . R = 9 \times 0{,}15 = 1{,}35 \ m.s^{-2}$$

أو

$$A_A = A_A^n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0{,}45)^2}{0{,}15} = 1{,}35 \ m.s^{-2}$$

$$\dot{r} = v_r = v_A . \cos 30 = 0{,}45 \times \cos 30 = 0{,}39 \ m.s^{-1}$$

$$v_\theta = -v_A . \sin 30 = -0{,}45 \times \sin 30 = -0{,}225 \ m.s^{-1}$$

$$v_\theta = r.\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} = \frac{-0{,}225}{0{,}15} = -1{,}5 \ rad.s^{-1}$$

$\cos 60 = \frac{A_r}{A_A} \Rightarrow A_r = -A_A \times \cos 60 = -1.35 \times \cos 60 = -0.675\ m.s^{-2}$

$\cos 30 = \frac{A_Q}{A_A} \Rightarrow A_Q = -A_A . \cos 30 = -1.35 \times \cos 30 = -1.17\ m.s^{-2}$

$A_r = \ddot{r} - r.\dot{Q}^2 \Rightarrow \ddot{r} = A_r + r.\dot{Q}^2 = -0.675 + 0.15 \times (-1.5)^2 = -1.0125\ m.s^{-2}$

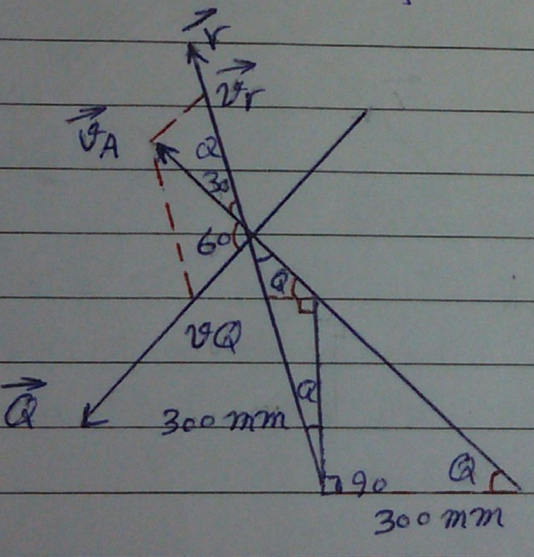
$A_Q = r.\ddot{Q} + 2\dot{r}\dot{Q} \Rightarrow r\ddot{Q} = A_Q - 2\dot{r}.\dot{Q} \Rightarrow \ddot{Q} = \frac{A_Q - 2\dot{r}\dot{Q}}{r} = \frac{-1.17 - 2(0.39)(-1.5)}{0.15}$

$= 0$

هذا لأنه ... وهي طالما $\omega = const \Leftarrow \ddot{Q} = 0$

مسألة 10 ص 69

هذا المثلث متساوي الساقين



ملاحظة: الزاوية بين $\vec{v}_A$ و $\vec{r}$ هي Q بالتبادل الداخلي

$Q = 30^\circ ,\ r = 300mm$

$\Rightarrow r = 0.3\ m$

$\dot{r} = v_r = v_A . \cos Q = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1.73\ m.s^{-1}$

$v_Q = v_A . \sin 30 = 2 \times \frac{1}{2} = 1\ m.s^{-1}$

$v_Q = r.\dot{Q} \Rightarrow \dot{Q} = \frac{v_Q}{r} = \frac{1}{0.3} = 3.33\ rad.s^{-1}$

بما أن الجسم يتحرك حركة انسحابية وبسرعة ثابتة هذا يؤدي الى التسارع الكلي معدوم.

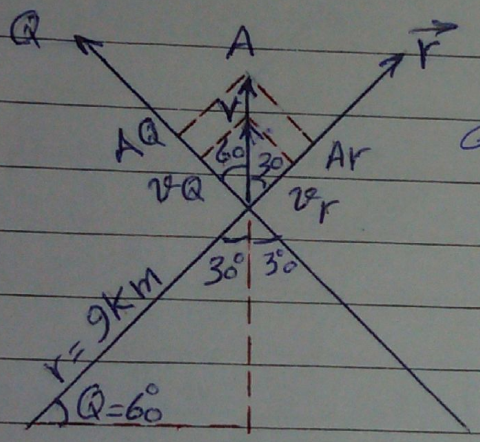
$A_A = 0 \Rightarrow A_r = 0 \Rightarrow A_Q = 0$

$A_A = A_r + A_Q$

$A_r = \ddot{r} - r.\dot{Q}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{r} = r.\dot{Q}^2 = 0,3 \times (3,33)^2 = 3,33\ m.s^{-2}$

$A_Q = r.\ddot{Q} + 2\dot{r}.\dot{Q} \Rightarrow r.\ddot{Q} = -2\dot{r}.\dot{Q} \Rightarrow \ddot{Q} = \dfrac{-2\dot{r}.\dot{Q}}{r} = \dfrac{-2(\sqrt{3})(3,33)}{0,3}$

$= -38,5\ rad.s^{-2}$



مسألة 11 ص 70

نلاحظ أن الحركة شاقولية مستقيمة أي التسارع الكلي هو تسارع مماسي أي شعاع السرعة والتسارع على حامل واحد.

$r = 9km \Rightarrow r = 900\ m$

$\dot{Q} = 0,02\ rad.s^{-1}$

$\ddot{r} = 21\ m.s^{-2}$

$\vec{V} = \vec{V_r} + \vec{V_Q} =$

$V_r = \dot{r} = V.\cos 30 = 360 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 311,8\ m.s^{-1}$

$V_Q = r.\dot{Q} \Rightarrow 9000 \times 0,02 = 180\ m.s^{-1}$

$\cos 60 = \dfrac{V_Q}{V} \Rightarrow V = \dfrac{V_Q}{\cos 60} = \dfrac{180}{0,5} = 360\ m.s^{-1}$

هناك طريقة أخرى لإيجاد V_r وهي

$V_r = \sqrt{V^2 - V_Q^2} \Rightarrow \sqrt{(360)^2 - (180)^2} = 311,8\ m.s^{-1}$

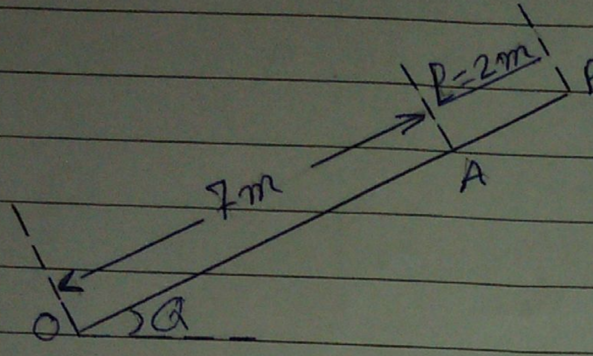
$\vec{A} = \vec{A_r} + \vec{A_Q}$

$A_r = \ddot{r} - r.\dot{Q}^2 = 21 - 9000(0,02)^2 = 17,4\ m.s^{-2}$

$\cos 30 = \dfrac{A_r}{A} \Rightarrow A = \dfrac{A_r}{\cos 30} = \dfrac{17,4}{\cos 30} = 20,1\ m.s^{-2}$

$A_Q = A.\cos 60 = 20,1 \times \frac{1}{2} = 10,05\ m.s^{-2}$

مسألة 12 ص 70



$\ell = 2m$, $\dot{\ell} = 0.5\ m.s^{-1}$, $\ddot{\ell} = -1.2\ m.s^{-2}$

$Q = 20$, $\dot{Q} = 5\ deg.s^{-1}$, $\ddot{Q} = 2\ deg.s^{-2}$

للتحويل من deg (درجة) إلى rad (راديان) نضرب بـ (الزاوية $\times \frac{\pi}{180}$)

$OB = 7 + \ell = 7 + 2 = 9\ m = r$

$VQ = OB \times \dot{Q} = OB \times 5 \times \frac{\pi}{180} = 9 \times 5 . \frac{\pi}{180}$

ملاحظة: $OB = r = 9m$

$VQ = 0.785\ m.s^{-1}$

$Vr = \dot{\ell} = 0.5\ m.s^{-1}$

$V = \sqrt{VQ^2 + Vr^2} = \sqrt{(0.785)^2 + (0.5)^2} = 0.93\ m.s^{-1}$

$Ar = \ddot{\ell} - r\dot{Q}^2 = -1.2 - 9.(5 \times \frac{\pi}{180})^2 = -1.27\ m.s^{-2}$

$AQ = r.\ddot{Q} + 2\dot{\ell}\dot{Q} = 9 \times \frac{2\pi}{180} + 2(0.5)(\frac{5\pi}{180}) = 0.4\ m.s^{-2}$

$A = \sqrt{(Ar)^2 + (AQ)^2} = \sqrt{(1.27)^2 + (0.4)^2} = 1.33\ m.s^{-2}$

انتهت حل المسائل

البحث الأول.